ESPONENZIALI E LOGARITMI

Potenze

Fino ad ora si sono definite le potenze ad esponenete intero e razionale (sia positivi che negativi). Ripassiamo le definizioni e i concetti che li riguardano:

Potenze ad esponente intero

$$a^{n}=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ volte}} \qquad a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$$

esponente

base

valgono le proprietà:

$a^{1}=a$

$a^{0}=1$

Per esponente negativo si toglie il segno e si sostituisce la base con il suo reciproco:

$$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^{n}$$

Potenze ad esponente razionale

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^{m}}}$$

Potenza ad esponente reale

Per definire la potenza con esponente reale ripassiamo come viene definito un numero di infinite cifre decimali: $x\in\mathbb{R}$

x è individuato da due classi separate ma vicinissime, che rappresentano rispettivamente le successive approssimazioni per eccesso e per difetto del numero stesso. es: $\sqrt{2}=1{,}41421356\ldots$

per difetto:	1;	1,4;	1,41;	1,414;	1,4142;	1,414213;	…
per eccesso:	2;	1,5;	1,42;	1,415;	1,4143;	1,414214:	…

Questi numeri, essendo decimali finiti, si possono scrivere come frazione:

$$1{,}4=\frac{14}{10}\ ;\quad 1{,}41=\frac{141}{100}\ ;\quad 1{,}414=\frac{1414}{1000}\ ;\quad 1{,}4142=\frac{14142}{10000}\ \ldots$$

$$1{,}5=\frac{15}{10}\ ;\quad 1{,}42=\frac{142}{100}\ ;\quad 1{,}415=\frac{1415}{1000}\ ;\quad 1{,}4143=\frac{14143}{10000}\ \ldots$$

per definire $a^{\sqrt{2}}$ si considerano quindi le successioni di potenze che si ottengono assegnando ad a, come esponenti, i numeri razionali che abbiamoappena visto; $a^{\sqrt{2}}$ sarà il valore che separa le due successioni:

per difetto: $a^{1}\ ;\ a^{\frac{14}{10}}\ ;\ a^{\frac{141}{100}}\ ;\ a^{\frac{1414}{1000}}\ ;\ a^{\frac{14142}{10000}}\ \ldots$

per eccesso $a^{2}\ ;\ a^{\frac{15}{10}}\ ;\ a^{\frac{142}{100}}\ ;\ a^{\frac{1415}{1000}}\ ;\ a^{\frac{14143}{10000}}\ \ldots$

Poiche non vi sarebbe chiarezza nella decisione del segno, le potenze ad esponente reale si definiscono solamente per base positiva (a>0)

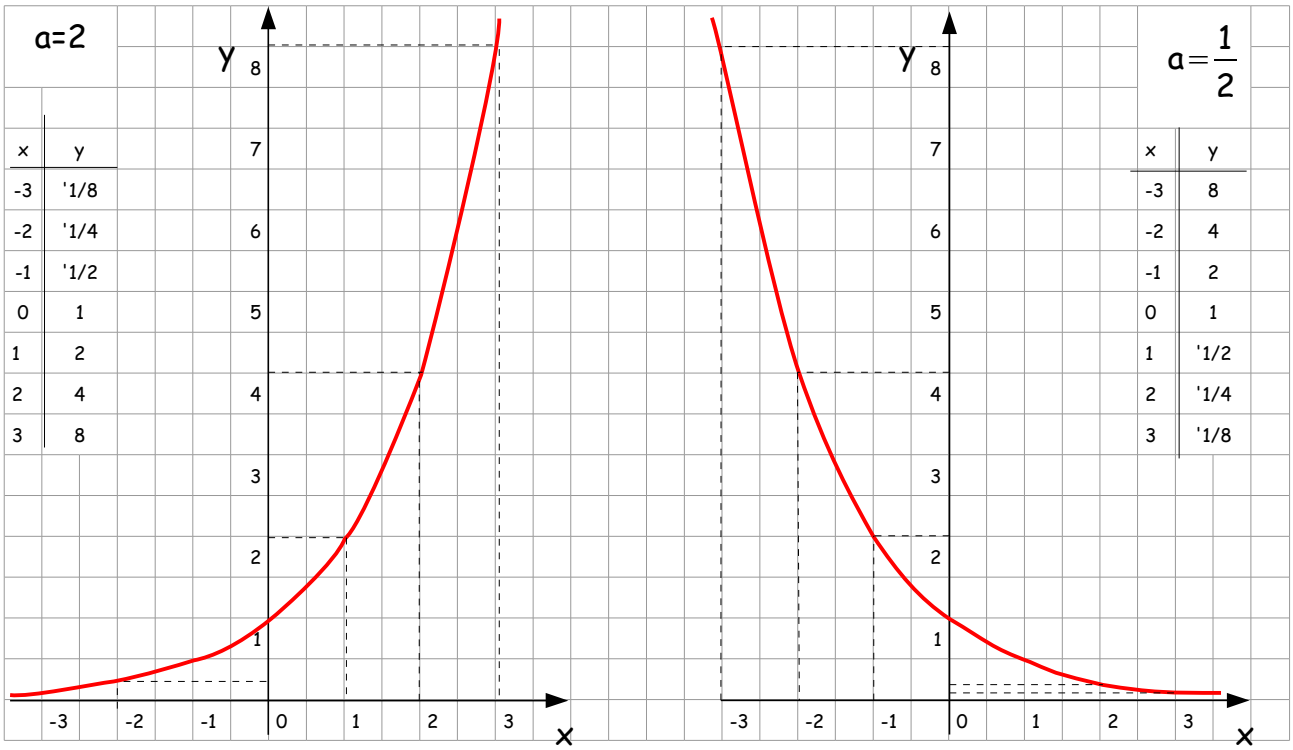
Funzione esponenziale

Se $(a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1)\Rightarrow a^{x}$ varia al variare di x.

$y=a^{x}$ è una funzione (cioè una relazione nella quale per ogni x posso ricavare un y) detta **funzione esponenziale**

Gli andamenti della curva sono due, a seconda del valore di a:

per a>1:



Osservazioni

- Tutte le curve esponenziali passano per il punto (0,1)
- y non assume mai valori negativi

Inoltre alcune caratteristiche dipendono dal valore di a:

Per a > 1:

- E' sempre crescente
- Al crescere di x i valori di y crescono sempre più velocemente
- Per x negativo, all'aumentare del valore assoluto di x, la curva si avvicina sempre più a zero senza toccarlo

Per 0 < a < 1

- E' sempre decrescente
- Al crescere di x la curva si avvicina sempre più a zero senza toccarlo
- Per x negativo, all'aumentare del valore assoluto di x, i valori di y crescono sempre più velocemente

Equazioni esponenziali

Un'equazione è un'uguaglianza in una o più variabili. Risolvere un'equazione significa trovare i valori delle incognite che soddisfano l'uguaglianza.
Fin'ora abbiamo visto solo equazioni dove x compare come base di potenza o a denominatore di una frazione.
Un'equazione esponenziale è un'equazione nella quale le variabili compaiono come esponenti.
Risolveremo ora equazioni esponenziali nelle quali le basi delle potenze sono un unico valore, o possono esserevi ricondotte:

esempio:

a) $2^x = 2^{4x+3}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = 3^2$

Per risolverle è sufficiente uguagliare gli esponenti dopo avere,se necessario, reso uguali le basi:

a) $2^x = 2^{4x+3} \Rightarrow x = 4x+3 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = 3^2 \Rightarrow 3^{-3x} = 3^2 \Rightarrow -3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Logaritmo

Dai grafici si nota che per $a>0, a\neq 1, b>0$ l'equazione $a^x=b$ ammette una ed una sola soluzione, cioè esiste una ed una sola x che, attribuito come esponente ad a, dà b.
Questo numero viene detto **logaritmo in base a di b**

esponente = logaritmo

$x = \log_a b$

argomento

base

Definizione: Il logaritmo è l'esponente da dare alla base per ottenere l'argomento

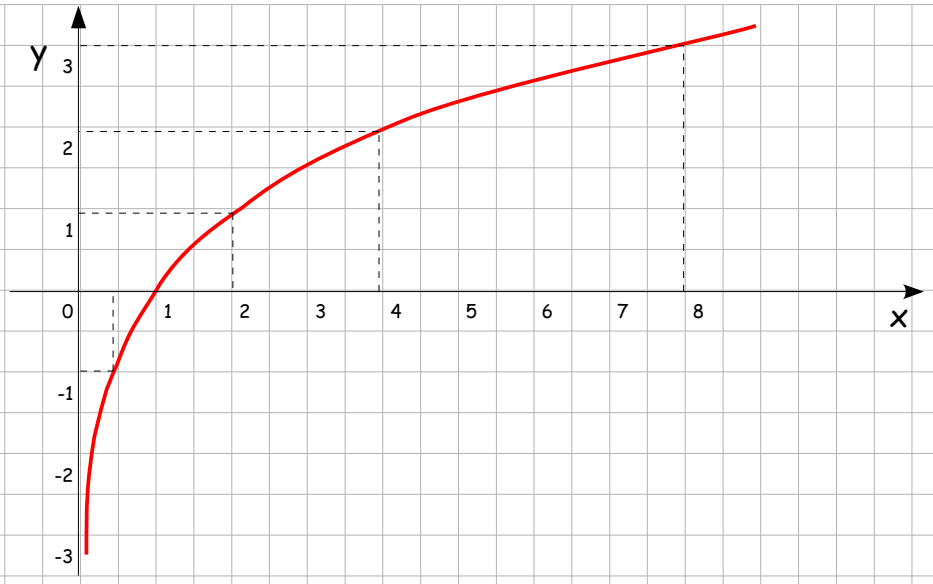
esempi:
$\log_2 32 = 5$
$\log_3 81 = 4$

Funzione logaritmica

Se $(a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1)$ anche ($\log_a x$) , come l'esponenziale, varia al variare di x.
Anche y= $\log_a x$ è una funzione e viene detta **funzione esponenziale**
Gli andamenti della curva sono due, a seconda del valore di a:
per a>1:

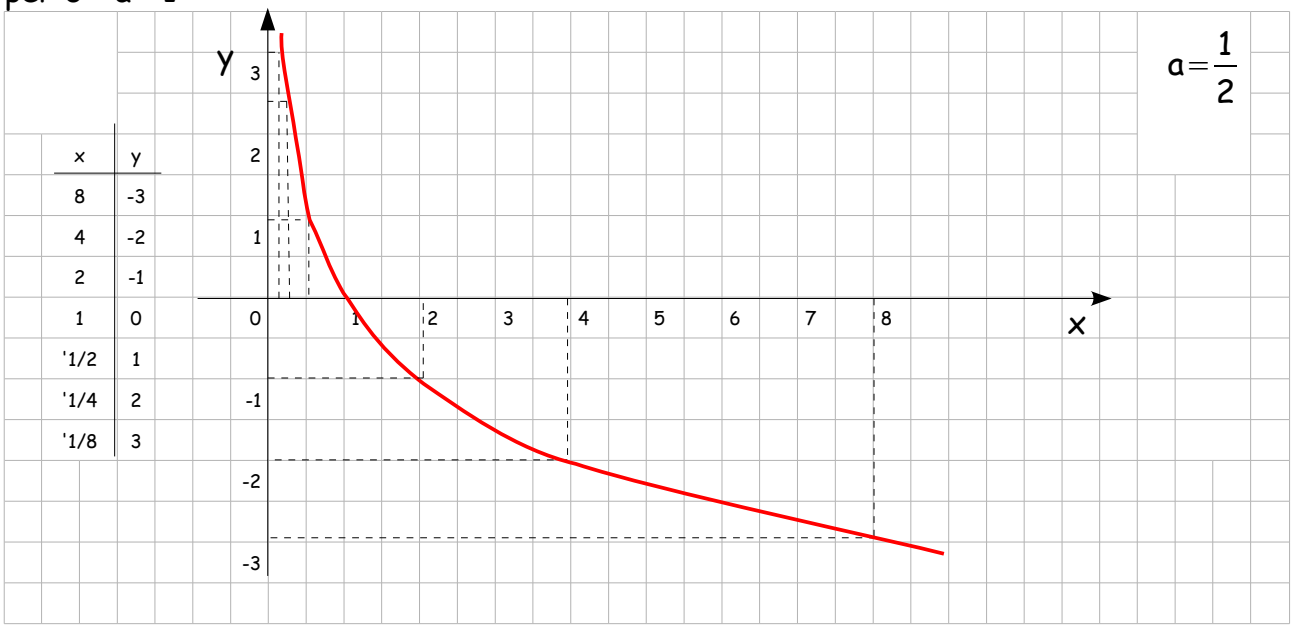
a=2

x	y
'1/8	-3
'1/4	-2
'1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



Esponenziali e logaritmi

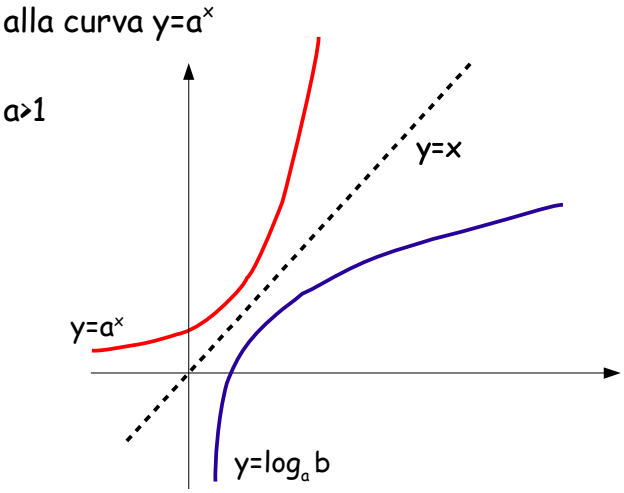
per 0 < a < 1

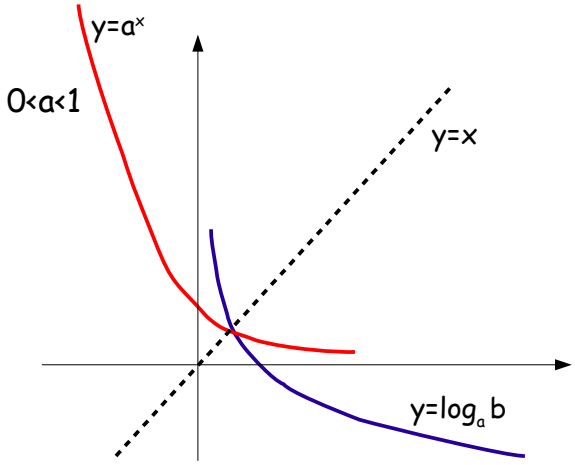


x	y
8	-3
4	-2
2	-1
1	0
'1/2	1
'1/4	2
'1/8	3

Osservazioni

- Tutte le curve esponenziali passano per il punto (1,0)
- x non assume mai valori negativi
- la curva $y=\log_a x$ è simmetrica rispetto alla bisettrice del 1 e 3 quadrante rispetto alla curva $y=a^x$





Inoltre alcune caratteristiche dipendono dal valore di a:

Per a > 1:

- E' sempre crescente
- Al crescere di x i valori di y crescono ma sempre più lentamente
- Per x che si avvicina a zero la curva si avvicina sempre più all'asse y senza

toccarlo, andando verso valori negativi sempre più grandi

Per 0 < a < 1

- E' sempre decrescente
- Al crescere di x i valori di y decrescono ma sempre più lentamente
- Per x che si avvicina a zero la curva si avvicina sempre più all'asse y senza toccarlo, andando verso valori positivi sempre più grandi

Proprietà dei logaritmi

I logaritmi godono di alcune proprietà, che si ricavano facilmente dalle proprietà delle potenze.

a) *Il logaritmo di un prodotto di fattori positivi è uguale al logaritmo della somma dei logaritmi dei singoli fattori,* cioè:

$$\log_a(b\cdot c\cdot d\cdot\ldots)=\ldots\log_a b+\log_a c+\log_a d+\ldots$$

Guardiamo la propietà delle potenze dalla quale deriva, dimostrandolo per 2 fattori:

$$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$$

poniamo $\log_a b=x$ e $\log_a c=y$ ✪

per la definizione di logaritmo $a^x=b$ e $a^y=c$

allora $b\cdot c = a^x\cdot a^y = a^{x+y}$

per la proprietà del prodotto di potenze di ugual base

$\Rightarrow b\cdot c=a^{x+y}$ per la definizione di logaritmo $\log_a(b\cdot c)=x+y$

facendo la sostituzione inversa a quella iniziale ✪

$$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$$

b) *Il logaritmo di un quoziente di due numeri positivi è uguale alla differenza tra il logaritmo del dividendo el il logaritmo del divisore*, cioè

$$\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$$

Guardiamo la propietà delle potenze dalla quale deriva, dimostrandolo per 2 fattori:

$$\log_a(\frac{b}{c})=\log_a b-\log_a c$$

poniamo $\log_a b=x$ e $\log_a c=y$ ✪

per la definizione di logaritmo $a^x=b$ e $a^y=c$

allora $\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

per la proprietà della divisione di potenze di ugual base

$\Rightarrow \frac{b}{c} = a^{x-y}$ per la definizione di logaritmo $\log_a(\frac{b}{c}) = x - y$

facendo la sostituzione inversa a quella iniziale ✪

$$\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$$

c) *Il logaritmo della potenza di un numero positivo, ad esponente reale qualunque, è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base della potenza*, cioè

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

d) *Il logaritmo in base* a *di un numero* b *diverso da 1, è uguale al reciproco del logaritmo in base* b *del numero* a, cioè:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

e) *Il logaritmo in base* a *di un numero* N *è uguale al rapporto tra il logaritmo dello stesso numero* N *in un altra base* b *e il logaritmo di* a *in base* b, cioè:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Quest'ultima proprietà si utilizza anche per il calcolo numerico dei logaritmi in una base qualunque. Infatti esistono tavole per il calcolo dei logaritmi in base 10 (detti **logaritmi decimali** o **di Briggs**) e in base **e** (numero di Nepero =2,718281828.... detti **logaritmi naturali** o **neperiani**), che sono anche calcolabili con la maggior parte delle calcolatrici scientifiche, ma risulta estremamente complicato il calcolo di un logaritmo in una base qualunque, a parte per quelli in cui l'argomento è una potenza della base. Solitamente i logaritmi in base 10 si scrivono tralasciando la base e scrivendo **Log** con la maiuscola (in alcuni lobri si tralascia semplicemente la base), mentre i logaritmi neperiani si indicano con **ln** invece che con $\log_e$:

esempio: $\log_{10} x$ si scrive Log x , mentre $\log_e x$ si scrive $\ln x$

Sfruttando la proprietà e, ad esempio, per calcolare il logaritmo di 5 in base 4 si calcola: $\log_4 5 = \frac{\log 5}{\log 4}$ oppure $\log_4 5 = \frac{\ln 5}{\ln 4}$

Equazioni logaritmiche

Un'equazione nella quale compare il logaritmo dell'incognita o di espressioni contenenti l'incognita viene detta **equazione logaritmica**.
In genere, per risolverla, si cerca di portarla nella forma:

$$\log_a A(x)=\log_a B(x) \qquad (1)$$

dove A(x) e B(x) sono due espressioni contenenti l'incognita x.
Per risolvere le equazioni, dopo averle riportate nella forma suddetta attraverso le proprietà appena viste, è necessario uguagliare i due argomenti, cioè porre

$$A(x)=B(x) \qquad (2)$$

In generale, però, non è detto che tutte le soluzioni della (2) siano soluzioni anche della (1), perchè in un logaritmo l'argomento dve per forza essere positivo, mentre questa condizione non è necessaria per la (2)

esempio: $\log_a(2-x)=\log_a(x-4)$

$\Rightarrow 2-x=x-4 \;\Rightarrow\; 2x=6 \;\Rightarrow\; x=3$

ma per x=3 *diventa* $\log_a(2-3)=\log_a(3-4) \;\Rightarrow\; \log_a(-1)=\log_a 1$ *:*

non può esistere il logaritmo di un numero negativo

E' necessario quindi, prima di uguagliare gli argomenti dei logaritmi, fissare le condizioni di esistenza, ponendo tutti gli argomenti dei logaritmi che compaiono maggiori di zero. Questo va fatto prima di applicare le proprietà per ottenere un unico logaritmo per parte.

esempio: $\log_a(x+1)+\log_a x=\log_a(4+x)$ *ha soluzioni diverse di quelle dell'equazione che si ottiene applicando il primo pricipio studiato:*

$\log_a[(x+1)\cdot x]=\log_a(4+x)$

infatti le condizioni di esistenza della prima sono:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x>0 \\ 4+x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>0 \\ x>-4 \end{cases} \Rightarrow\; x>0$$

mentre quelle della seconda sono

$$\begin{cases} (x+1)\cdot x>0 \\ 4+x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \vee x>0 \\ x>-4 \end{cases} \Rightarrow\; -4<x<1 \vee x>0$$

Uguagliando gli argomenti ottengo

$(x+1)\cdot x=4+x \;\Rightarrow\; x^2+x=4+x \;\Rightarrow\; x^2=4 \;\Rightarrow\; x=\pm 2$

ma x=-2 *è accettabile per la seconda ma non per l'equazione iniziale*